निर्देशांक ज्यामिति

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» निर्देशांक अक्षों और बिंदुओं की स्थिति की पुनरावृत्ति

प्रश्न 1 (आसान). बिंदु (3, 5) में भुज और कोटि क्या हैं?

उत्तर – भुज = 3, कोटि = 5

प्रश्न 2 (आसान). अगर एक बिंदु X-अक्ष पर है, तो उसका y-निर्देशांक क्या होगा?

उत्तर – 0

प्रश्न 3 (मध्यम). बिंदु (-2, 0) और (0, -4) को निर्देशांक अक्षों पर दर्शाइए। ये किस अक्ष पर स्थित हैं?

उत्तर – (-2, 0) x-अक्ष पर है, (0, -4) y-अक्ष पर है।

प्रश्न 4 (कठिन). बिंदु P(x, y) Y-अक्ष से 7 इकाई की दूरी पर है और X-अक्ष से 3 इकाई की दूरी पर है। यदि P पहले चतुर्थांश में है तो उसके निर्देशांक क्या होंगे?

उत्तर – (7, 3)

» दूरी सूत्र की व्युत्पत्ति

प्रश्न 5 (आसान). बिंदुओं (1, 2) और (4, 2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 3 इकाई

प्रश्न 6 (आसान). मूलबिंदु (0,0) से बिंदु (3,4) की दूरी क्या है?

उत्तर – 5 इकाई

प्रश्न 7 (मध्यम). बिंदुओं (-5, 7) और (-1, 3) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 42 इकाई

प्रश्न 8 (कठिन). यदि बिंदुओं (k, 5) और (2, 3) के बीच की दूरी 8 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – k = 4 या k = 0

» दूरी सूत्र का अनुप्रयोग

प्रश्न 9 (आसान). क्या बिंदु A(1, 2), B(3, 4) और C(5, 6) संरेखी हैं?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 10 (आसान). बिंदु (5, -2), (6, 4) और (7, -2) से बना त्रिभुज किस प्रकार का है?

उत्तर – समद्विबाहु त्रिभुज

प्रश्न 11 (मध्यम). x-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो (2, -5) और (-2, 9) से समदूरस्थ हो।

उत्तर – (-7, 0)

प्रश्न 12 (कठिन). यदि Q(0, 1) बिंदुओं P(5, -3) और R(x, 6) से समदूरस्थ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए। दूरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर – x = 4 या x = -4; QR = 41; PR = 82

» विभाजन सूत्र की व्युत्पत्ति

प्रश्न 13 (आसान). बिंदु A(1, 2) और B(4, 5) को 1:1 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक क्या होंगे?
उत्तर – (2.5, 3.5)

प्रश्न 14 (आसान). यदि P(x, y) बिंदु A(0, 0) और B(10, 0) को 1:4 के अनुपात में विभाजित करता है, तो P के निर्देशांक बताओ।
उत्तर – (2, 0)

प्रश्न 15 (मध्यम). बिंदु (-1, 7) और (4, -3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 2:3 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
उत्तर – (1, 3)

प्रश्न 16 (कठिन). बिंदु A(5, -6) और B(-1, 2) को जोड़ने वाले रेखाखंड को y-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है? विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
उत्तर – अनुपात 5:1 है और विभाजन बिंदु (0, -10/6 या -5/3) है।

» विभाजन सूत्र की विशिष्ट स्थितियाँ (मध्य-बिंदु)

प्रश्न 17 (आसान). बिंदुओं (4, 6) और (10, 2) के मध्य-बिंदु के निर्देशांक क्या हैं?
उत्तर – (7, 4)

प्रश्न 18 (आसान). बिंदुओं (-2, 5) और (6, -1) के मध्य-बिंदु के निर्देशांक क्या हैं?
उत्तर – (2, 2)

प्रश्न 19 (मध्यम). एक रेखाखंड का मध्य-बिंदु (5, 4) है। यदि एक सिरा (3, 2) है, तो दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
उत्तर – (7, 6)

प्रश्न 20 (कठिन). बिंदुओं A(-1, 0) और B(7, 4) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB के उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो इसे तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।
उत्तर – पहले बिंदु के लिए 1:2 अनुपात, दूसरे बिंदु के लिए 2:1 अनुपात का उपयोग करें। (5/3, 4/3) और (13/3, 8/3)

» विभाजन सूत्र का अनुप्रयोग

प्रश्न 21 (आसान). बिंदुओं (1, 7) और (4, -3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 2:3 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
उत्तर – (2, 3)

प्रश्न 22 (मध्यम). बिंदुओं A(-2, 2) और B(2, 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
उत्तर – (-1, 3.5), (0, 5), (1, 6.5)

प्रश्न 23 (कठिन). वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदुओं A(1, -5) और B(-4, 5) को मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
उत्तर – अनुपात 1:1 है, और विभाजन बिंदु के निर्देशांक (-1.5, 0) हैं।

» समांतर चतुर्भुज में विभाजन सूत्र का अनुप्रयोग

प्रश्न 24 (आसान). अगर एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष A(1, 2), B(3, 4), C(x, 6) और D(4, y) हैं, तो विकर्ण AC के मध्यबिंदु के निर्देशांक बताओ।
उत्तर – ((1+x)/2, 4)

प्रश्न 25 (आसान). इसी चतुर्भुज में, विकर्ण BD के मध्यबिंदु के निर्देशांक क्या होंगे?

उत्तर – ((3+4)/2, (4+y)/2) = (7/2, (4+y)/2)

प्रश्न 26 (मध्यम). यदि बिंदु (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5) इसी क्रम में एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हों, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – x = 6, y = 3

प्रश्न 27 (कठिन). एक समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष A(2, 3), B(-1, 0) और C(4, -2) हैं। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर – D(7, 1)

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. बिंदु A(5, 0), B(0, 3) और C(2, 4) को निर्देशांक अक्षों पर दर्शाइए और बताइए कि इनमें से कौन सा बिंदु x-अक्ष पर है और कौन सा y-अक्ष पर।

› सबसे पहले, एक ग्राफ पेपर पर X-अक्ष (हॉरिज़ॉन्टल) और Y-अक्ष (वर्टिकल) खींचिए। जहाँ ये दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं, वो हमारा मूल बिंदु (0,0) है।

› बिंदु A(5, 0) के लिए: X-अक्ष पर 5 कदम दाएँ चलिए और Y-अक्ष पर 0 कदम, मतलब ऊपर या नीचे नहीं जाना। तो ये बिंदु X-अक्ष पर होगा।

› बिंदु B(0, 3) के लिए: X-अक्ष पर 0 कदम, मतलब दाएँ या बाएँ नहीं जाना। फिर Y-अक्ष पर 3 कदम ऊपर चलिए। तो ये बिंदु Y-अक्ष पर होगा।

› बिंदु C(2, 4) के लिए: X-अक्ष पर 2 कदम दाएँ चलिए। फिर उस बिंदु से Y-अक्ष के समांतर 4 कदम ऊपर चलिए। ये बिंदु किसी अक्ष पर नहीं होगा, बल्कि पहले चतुर्थांश में होगा।

› अब पहचानते हैं: बिंदु A(5, 0) में, y-निर्देशांक 0 है, इसलिए यह X-अक्ष पर है। बिंदु B(0, 3) में, x-निर्देशांक 0 है, इसलिए यह Y-अक्ष पर है।

उत्तर – बिंदु A(5,0) x-अक्ष पर है। बिंदु B(0,3) y-अक्ष पर है। बिंदु C(2,4) किसी भी अक्ष पर नहीं है।

उदाहरण 2. बिंदुओं A(2, 3) और B(6, 6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

› पहले हम दिए गए बिंदुओं को पहचानते हैं: P(x, y) = A(2, 3) और Q(x, y) = B(6, 6)। तो x = 2, y = 3, x = 6, y = 6।

› अब हम दूरी सूत्र लिखेंगे: PQ = $[(x - x)^2 + (y - y)^2]$

› सूत्र में मान रखेंगे: PQ = $[(6 - 2)^2 + (6 - 3)^2]$

› घटाव करेंगे: PQ = $[(4)^2 + (3)^2]$

› वर्ग करेंगे: PQ = [16 + 9]

› जोड़ेंगे: PQ = [25]

› वर्गमूल निकालेंगे: PQ = 5

उत्तर – बिंदुओं A(2, 3) और B(6, 6) के बीच की दूरी 5 इकाई है।

उदाहरण 3. जाँच कीजिए कि क्या बिंदु P(1, 5), Q(2, 3) और R(-2, -11) संरेखी (Collinear) हैं?

› पहले हम P और Q के बीच की दूरी (PQ) निकालेंगे। सूत्र है: $((x2-x1)^2 + (y2-y1)^2)$

› PQ = $((2-1)^2 + (3-5)^2) = ((1)^2 + (-2)^2) = (1 + 4) = 5$

› अब Q और R के बीच की दूरी (QR) निकालेंगे।

› QR = $((-2-2)^2 + (-11-3)^2) = ((-4)^2 + (-14)^2) = (16 + 196) = 212$

› फिर P और R के बीच की दूरी (PR) निकालेंगे।

› PR = $((-2-1)^2 + (-11-5)^2) = ((-3)^2 + (-16)^2) = (9 + 256) = 265$

› संरेखी होने के लिए, किन्हीं भी दो दूरियों का योग तीसरी दूरी के बराबर होना चाहिए।

› हम देखते हैं: 5 + 212 2.23 + 14.56 = 16.79. और 265 16.27.

› चूंकि PQ + QR PR (16.79 16.27), तो ये बिंदु संरेखी नहीं हैं।

› याद रखना, संरेखी का मतलब है कि वे एक ही सीधी रेखा पर हैं, तो छोटी वाली दो दूरियों को जोड़ने पर बड़ी वाली दूरी आनी चाहिए।

उत्तर – बिंदु P(1, 5), Q(2, 3) और R(-2, -11) संरेखी नहीं हैं।

उदाहरण 4. बिंदु A(2, 3) और B(6, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिंदु P, 1:3 के अनुपात में विभाजित करता है। बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले दिए गए मान लिख लेते हैं: A(x1, y1) = (2, 3), B(x2, y2) = (6, 7) और अनुपात m1:m2 = 1:3।

› अब हम विभाजन सूत्र का उपयोग करेंगे: P(x, y) = ((m1x2 + m2x1) / (m1 + m2), (m1y2 + m2y1) / (m1 + m2))।

› x-नर्दिेशांक के लिए मान रखेंगे: x = (1 * 6 + 3 * 2) / (1 + 3) = (6 + 6) / 4 = 12 / 4 = 3।

› y-नर्दिेशांक के लिए मान रखेंगे: y = (1 * 7 + 3 * 3) / (1 + 3) = (7 + 9) / 4 = 16 / 4 = 4।

› तो बिंदु P के निर्देशांक (3, 4) हैं।

उत्तर – बिंदु P के निर्देशांक (3, 4) हैं।

उदाहरण 5. बिंदुओं A(2, 3) और B(8, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्य-बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

› यहाँ x1 = 2, y1 = 3 और x2 = 8, y2 = 7 है।

› मध्य-बिंदु सूत्र का उपयोग करने पर: P(x, y) = ((x1 + x2)/2, (y1 + y2)/2)

› x-नर्दिेशांक = (2 + 8) / 2 = 10 / 2 = 5

› y-नर्दिेशांक = (3 + 7) / 2 = 10 / 2 = 5

उत्तर – अतः, मध्य-बिंदु के निर्देशांक (5, 5) हैं।

उदाहरण 6. बिंदुओं A(4, -3) और B(8, 5) को जोड़ने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से 3:1 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, हमें दिया गया है m1 = 3 और m2 = 1।

› बिंदु A के निर्देशांक (x1, y1) = (4, -3) हैं।

› बिंदु B के निर्देशांक (x2, y2) = (8, 5) हैं।

› अब, x-निर्देशांक निकालने के लिए सूत्र लगाते हैं: x = (m1x2 + m2x1) / (m1 + m2)

› मान रखने पर: x = (3 * 8 + 1 * 4) / (3 + 1) = (24 + 4) / 4 = 28 / 4 = 7

› अब, y-निर्देशांक निकालने के लिए सूत्र लगाते हैं: y = (m1y2 + m2y1) / (m1 + m2)

› मान रखने पर: y = (3 * 5 + 1 * -3) / (3 + 1) = (15 - 3) / 4 = 12 / 4 = 3

उत्तर – अतः, वह बिंदु जो रेखाखंड को 3:1 के अनुपात में विभाजित करता है, उसके निर्देशांक (7, 3) हैं।

उदाहरण 7. यदि बिंदु A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) और D(p, 3) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो 'p' का मान ज्ञात कीजिए।

› पहला कदम, बच्चों, हमें समांतर चतुर्भुज का एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण याद रखना होगा: इसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। मतलब, वे एक दूसरे को ठीक बीच में काटते हैं। इसका ये मतलब हुआ कि विकर्ण AC का मध्यबिंदु और विकर्ण BD का मध्यबिंदु एक ही होगा।

› अब हम विकर्ण AC के मध्यबिंदु के निर्देशांक निकालते हैं। मध्यबिंदु सूत्र क्या है? (x1+x2)/2, (y1+y2)/2। तो AC के लिए: x-निर्देशांक होगा (6+9)/2 = 15/2। और y-निर्देशांक होगा (1+4)/2 = 5/2। तो AC का मध्यबिंदु आया (15/2, 5/2)।

› अब हम विकर्ण BD के मध्यबिंदु के निर्देशांक निकालते हैं। B(8, 2) और D(p, 3) हैं। तो BD के लिए: x-निर्देशांक होगा (8+p)/2। और y-निर्देशांक होगा (2+3)/2 = 5/2। तो BD का मध्यबिंदु आया ((8+p)/2, 5/2)।

› चूंकि दोनों विकर्णों का मध्यबिंदु एक ही होता है, हम x-निर्देशांकों को और y-निर्देशांकों को बराबर रखेंगे। y-निर्देशांक तो पहले से ही 5/2 = 5/2 है। तो हम x-निर्देशांक को बराबर रखेंगे: 15/2 = (8+p)/2।

› अब इसको हल करो। दोनों तरफ से '2' को हटा दो, तो 15 = 8+p। 'p' का मान निकालने के लिए 8 को दूसरी तरफ

ले जाओ। 15 - 8 = p।

› तो, p = 7।

उत्तर – p का मान 7 है।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• कई बार, एक नंबर के सवाल में सीधे भुज या कोटि की परिभाषा या किसी अक्ष पर स्थित बिंदु के निर्देशांक पूछे जाते हैं, इसलिए इस मूल बात को अच्छे से समझ कर रखना।

• दूरी सूत्र बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर 2-3 अंकों के सीधे प्रश्नों या अन्य बड़े प्रश्नों का हिस्सा बनकर आता है। इसकी व्युत्पत्ति को समझना और इस पर आधारित सवाल हल करना बहुत ज़रूरी है।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। त्रिभुज और चतुर्भुजों के प्रकार पर आधारित प्रश्न अक्सर पूछे जाते हैं, और समदूरस्थ बिंदुओं वाले प्रश्न तो पक्के आते हैं, इसलिए इनकी खूब प्रैक्टिस करना!

• यह सूत्र और इसकी व्युत्पत्ति बोर्ड परीक्षा में सीधे-सीधे 3 से 4 अंक के प्रश्न में आ सकती है। इसके हर स्टेप को अच्छे से समझना और याद रखना।

• यह सूत्र समांतर चतुर्भुज (parallelogram) और समचतुर्भुज (rhombus) के विकर्णों (diagonals) के मध्य-बिंदु ज्ञात करने वाले प्रश्नों में अक्सर काम आता है, जो बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण हैं।

• यह सूत्र बोर्ड परीक्षा में 3-4 अंकों के प्रश्न के रूप में आता है। सम-त्रिभाजन और अक्षों द्वारा विभाजन वाले प्रश्न बहुत महत्वपूर्ण हैं।

• बोर्ड परीक्षा में ऐसे प्रश्न अक्सर 'x' या 'y' का मान ज्ञात करने के लिए आते हैं। सभी चरणों को साफ-साफ लिखें और मध्यबिंदु सूत्र को सही से लगाएं। 'यदि ¯बदु ;1ए 2द्धए ;4ए लद्धए ;गए 6द्ध और ;3ए 5द्धए इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज वेफ शीर्ष हो तो ग और ल ज्ञात कीजिए।' – यह बिलकुल ऐसे ही पूछा जाता है।

एक नज़र में रिवीज़न

› निर्देशांक अक्ष: X (क्षैतिज), Y (ऊर्ध्वाधर); भुज (x), कोटि (y); X-अक्ष पर (x,0), Y-अक्ष पर (0,y)

› दो बिंदुओं P(x, y) और Q(x, y) के बीच दूरी = $[(x - x)^2 + (y - y)^2]$

› दूरी सूत्र से त्रिभुज/चतुर्भुज प्रकार, संरेखीयता, समदूरस्थ बिंदु ज्ञात करें।

› विभाजन सूत्र: P(x, y) = ((m1x2 + m2x1)/(m1 + m2), (m1y2 + m2y1)/(m1 + m2))

› मध्य-बिंदु: (x+x)/2, (y+y)/2 (अनुपात 1:1)

› विभाजन सूत्र: m1x2+m2x1/m1+m2, m1y2+m2y1/m1+m2; सम-त्रिभाजन (1:2, 2:1); अक्षों द्वारा विभाजन (x=0 या y=0)

› समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के मध्यबिंदु समान होते हैं।